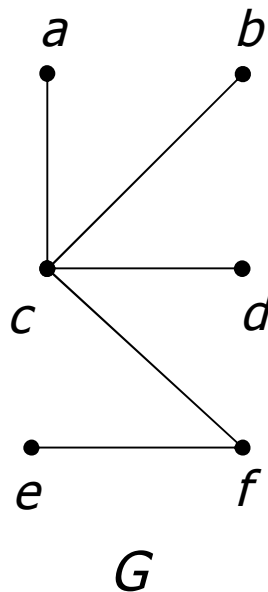


CÂY VÀ CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

- Cây và các tính chất của cây
- Cây khung của đồ thị
- Bài toán cây khung nhỏ nhất

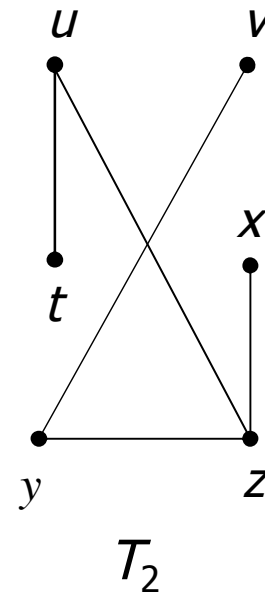
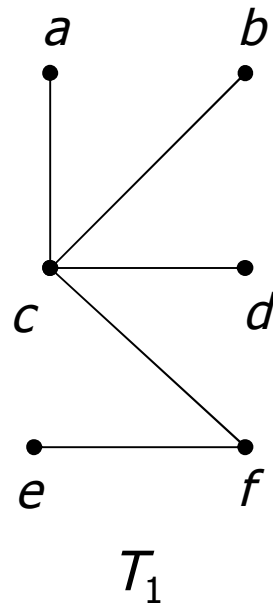
CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Cây tự do (free tree) là một đồ thị vô hướng liên thông không có chu trình (rừng là tập nhiều cây)



CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

- Một rừng hai cây

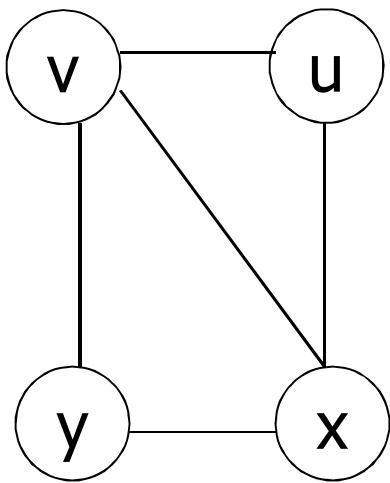


CÂY VÀ TÍNH CHẤT CỦA CÂY

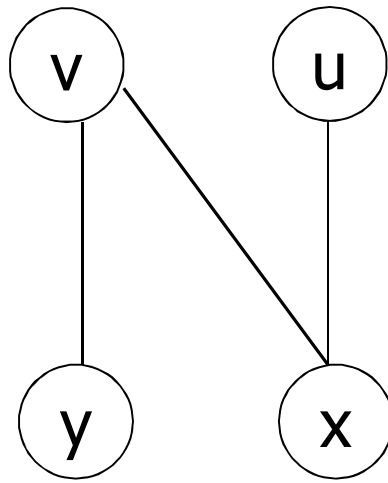
- **Định lý 1:** Đồ thị T vô hướng n đỉnh là một cây nếu thỏa một trong các tính chất sau
 - T không chứa chu trình và có $n-1$ cạnh
 - T liên thông và có $n-1$ cạnh
 - T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cầu
 - Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng một đường đi duy nhất
 - T không chứa chu trình nhưng nếu thêm vào một cạnh thì có một chu trình duy nhất

CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

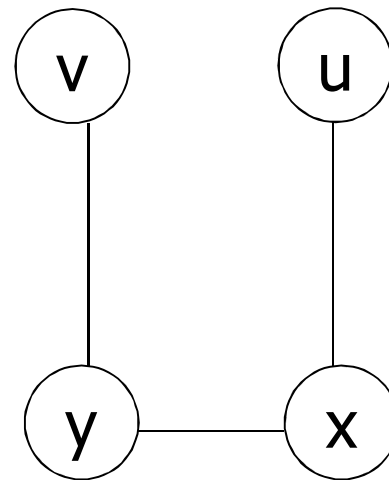
- Cây $T = (V, F)$ được gọi là một cây khung (spanning tree) của đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ nếu $F \subseteq E$



G



Cây BT T_1



Cây BT T_2

CÂY KHUNG NHỎ NHẤT

- Khái niệm
- Thuật toán Kruskal
- Thuật toán Prim

KHÁI NIỆM

- Cho G là một đồ thị vô hướng, liên thông có trọng số và T là một cây khung của G
 - Trọng số của T , ký hiệu $w(T)$, là tổng trọng số của tất cả các cạnh của nó: $w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$
 - Bài toán: Tìm một cây khung T có trọng số nhỏ nhất (minimum spanning tree-MST) của G

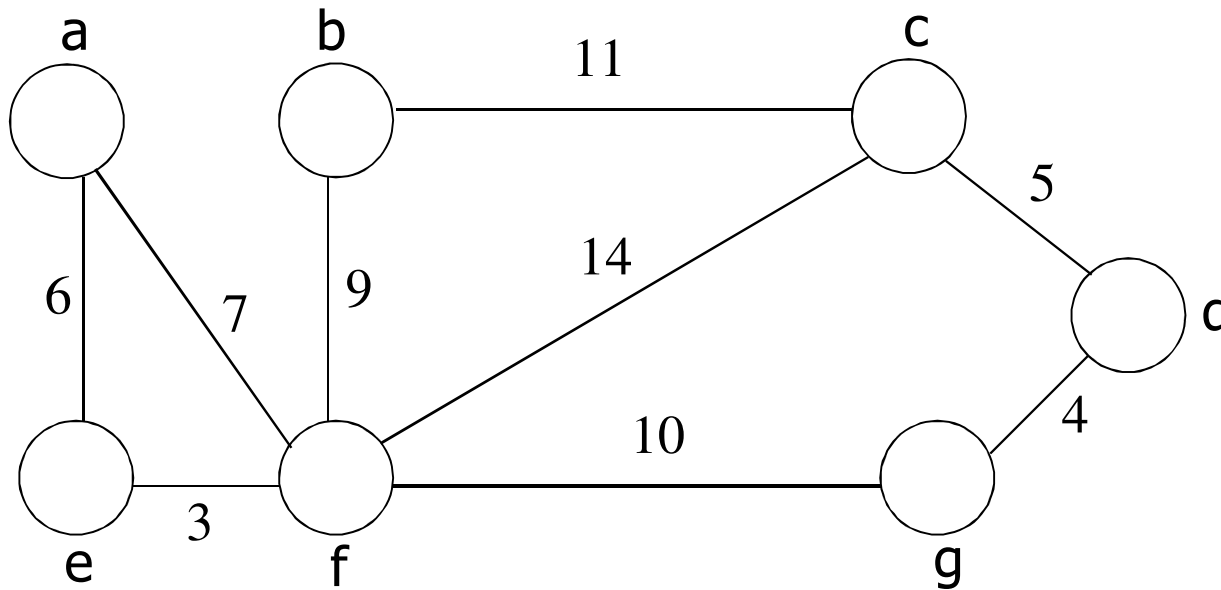
THUẬT TOÁN KRUSKAL

Ý tưởng

- Tại mỗi bước, thuật toán tìm một cạnh có **trọng số nhỏ nhất** thêm vào tập cạnh của cây khung sao cho **không gây ra chu trình**
- Thuật toán dừng khi số cạnh của cây bằng số đỉnh của đồ thị trừ 1

THUẬT TOÁN KRUSKAL

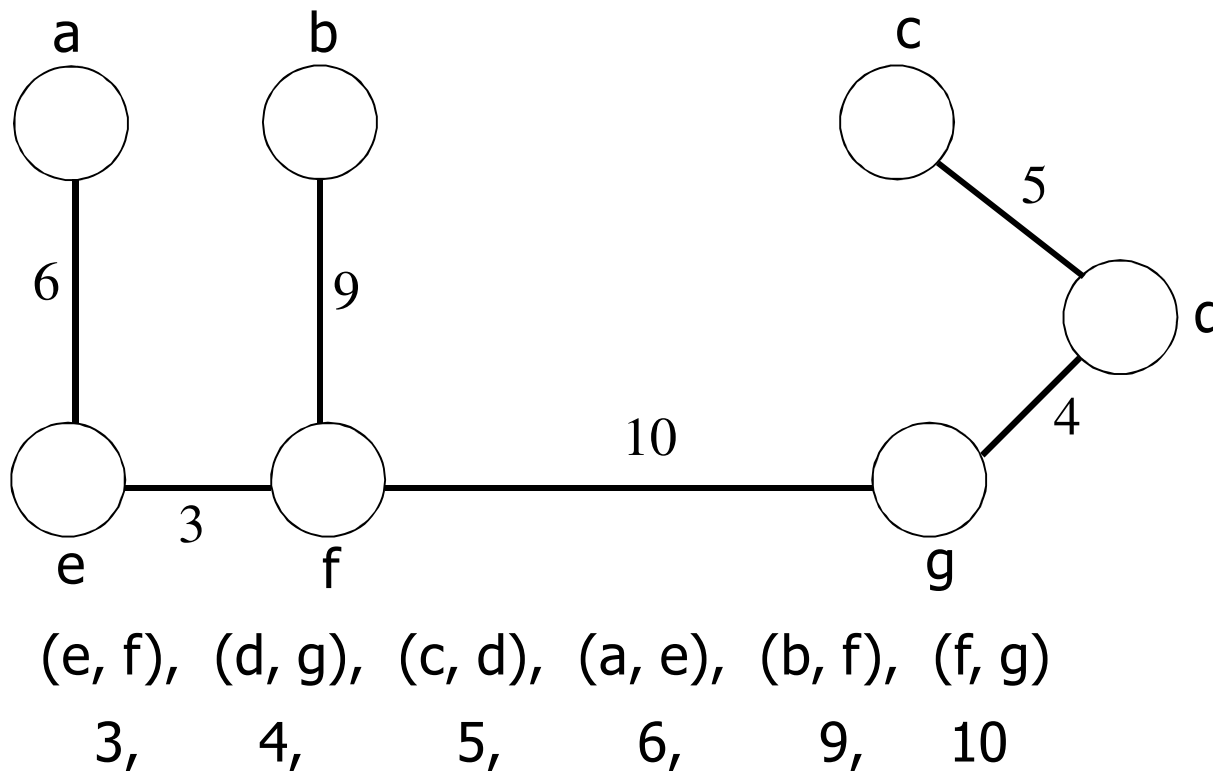
- Đồ thị G có trọng số và các cạnh được sắp



(e, f), (d, g), (c, d), (a, e), (a, f), (b, f), (f, g), (b, c), (c, f)
3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14

THUẬT TOÁN KRUSKAL

- Cây khung nhỏ nhất của G



THUẬT TOÁN KRUSKAL

KRUSKAL(G, w) // $G = (V, E)$ có n đỉnh

1. $F \leftarrow \emptyset$ // F là tập cạnh của cây MST
2. Sort the edges of E into nondecreasing order by weight w
3. **while** $|F| < n-1$ and $E \neq \emptyset$ // thực hiện cho đến khi $|F| = n-1$ hoặc $E = \emptyset$
4. **do** $e \leftarrow x \mid w(x) = \min\{w(y), y \in E\}$ $\triangleright$ e có trọng số bé nhất
5. $E \leftarrow E - \{e\}$
6. **if** $F \cup \{e\}$ not contain cycle **then** $F \leftarrow F \cup \{e\}$
7. **if** $|F| < n-1$
8. **then** G is not connected
9. **else return** $T = (V, F)$

THUẬT TOÁN PRIM

Ý tưởng

- Khởi đầu, thuật toán chọn một đỉnh bất kỳ của đồ thị làm đỉnh gốc của cây khung bé nhất
- Tại mỗi bước chọn thêm một đỉnh của đồ thị mà trọng số cạnh nối nó với một đỉnh của cây là nhỏ nhất
- Thuật toán kết thúc khi tất cả các đỉnh của đồ thị đã được chọn

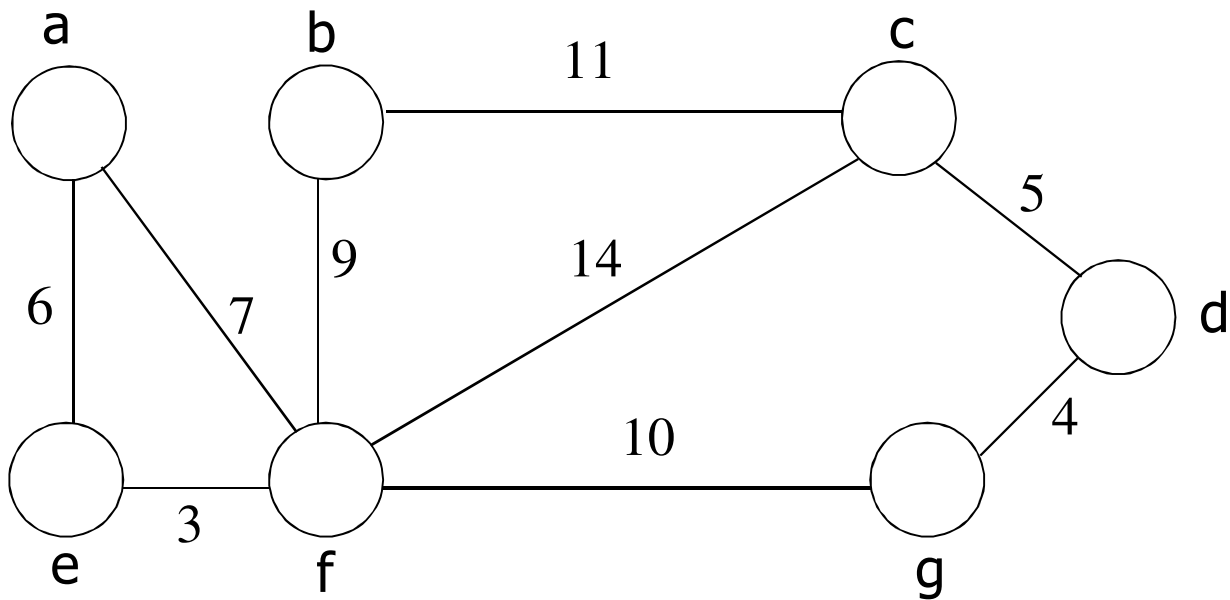
THUẬT TOÁN PRIM

MST-PRIM(G, w, s)

```
1  for each  $u \in V[G]$ 
2      do  $\text{key}[u] \leftarrow \infty$  //  $\text{key}[u]$  là trọng số nhỏ nhất của cạnh nối  $u$ 
3       $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$  // với một đỉnh trong cây MST đang xây dựng
4   $\text{key}[s] \leftarrow 0$ 
5   $Q \leftarrow V[G]$ 
6  while  $Q \neq \emptyset$ 
7      do  $u \leftarrow \text{Extract-min}(Q)$  //  $u$  là đỉnh có key nhỏ nhất
8      for each  $v \in \text{Adj}[u]$ 
9          do if  $v \in Q$  and  $w(u,v) < \text{key}[v]$ 
10             then  $\pi[v] \leftarrow u$ 
11              $\text{key}[v] \leftarrow w(u,v)$ 
```

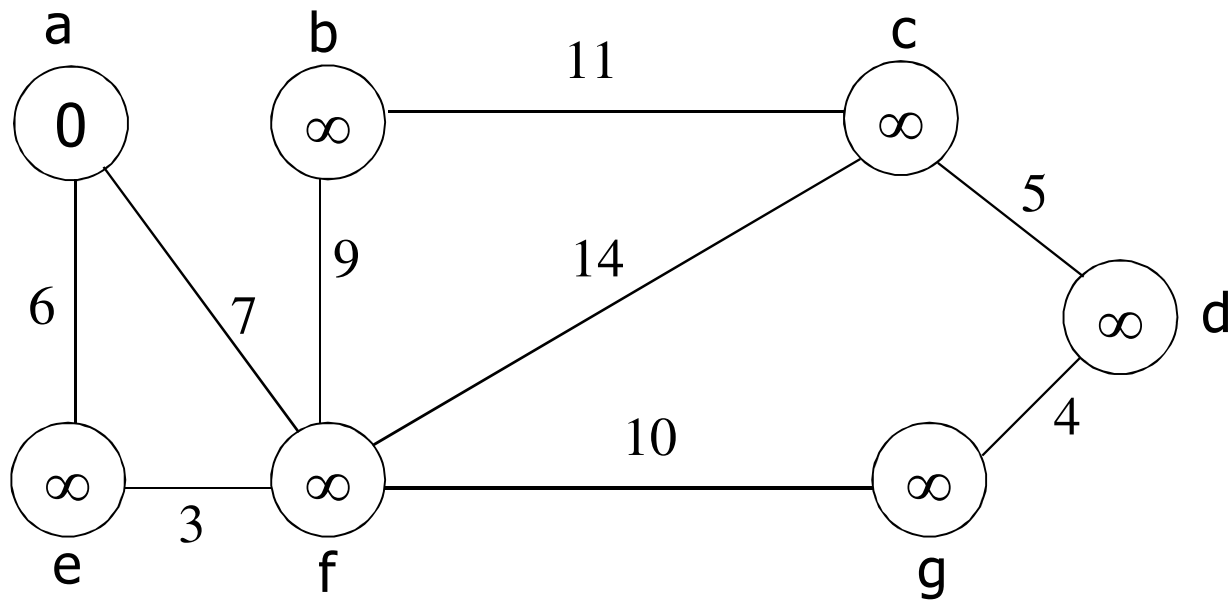
THUẬT TOÁN PRIM

- Đồ thị G có trọng số, lấy a làm đỉnh xuất phát



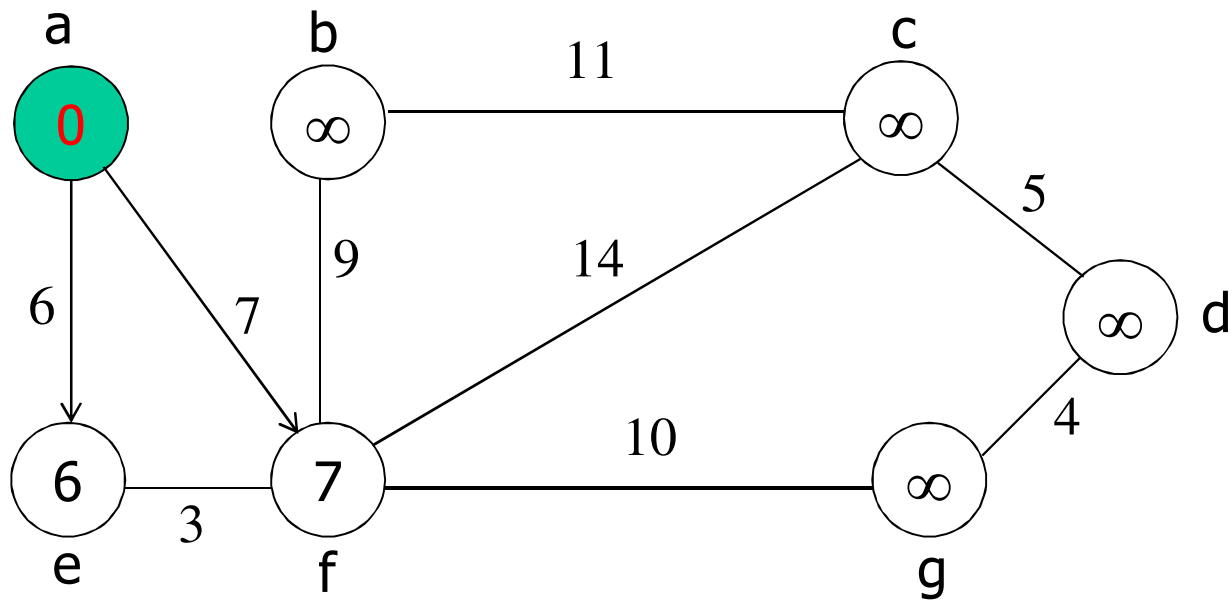
THUẬT TOÁN PRIM

- $\text{Key}[a]=0$, $\text{key}[u]=\infty$ với mọi u thuộc V



THUẬT TOÁN PRIM

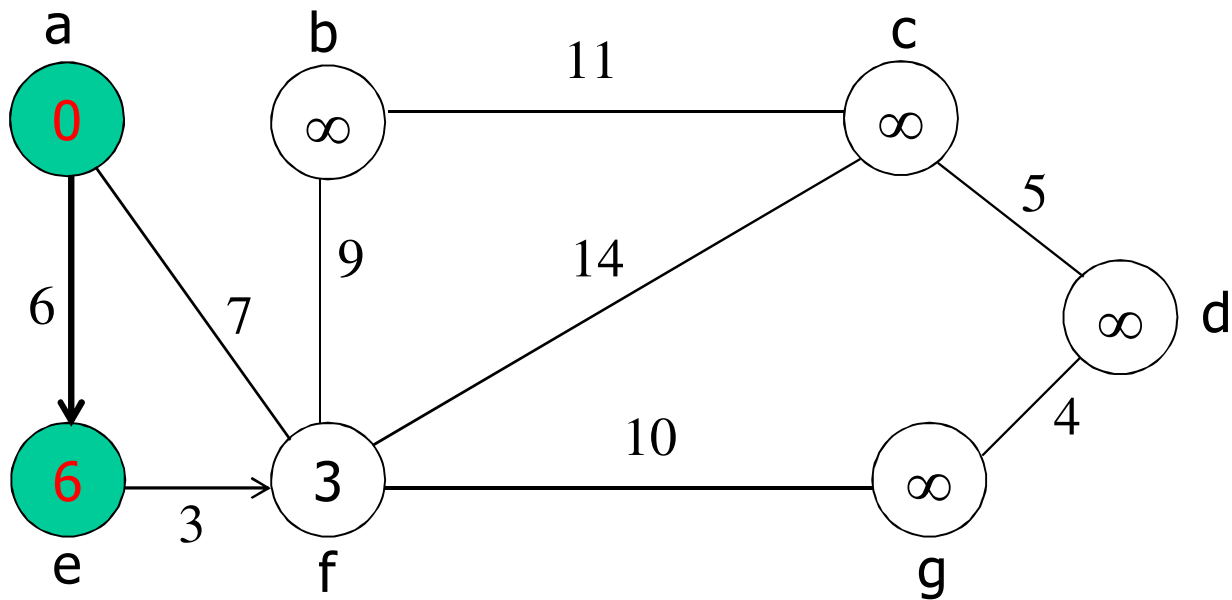
- Chọn a là đỉnh đầu tiên của MST (do $\text{key}[a] = 0$ nhỏ nhất)



Cập nhật $\text{key}[e]=6$, $\text{key}[f]=7$

THUẬT TOÁN PRIM

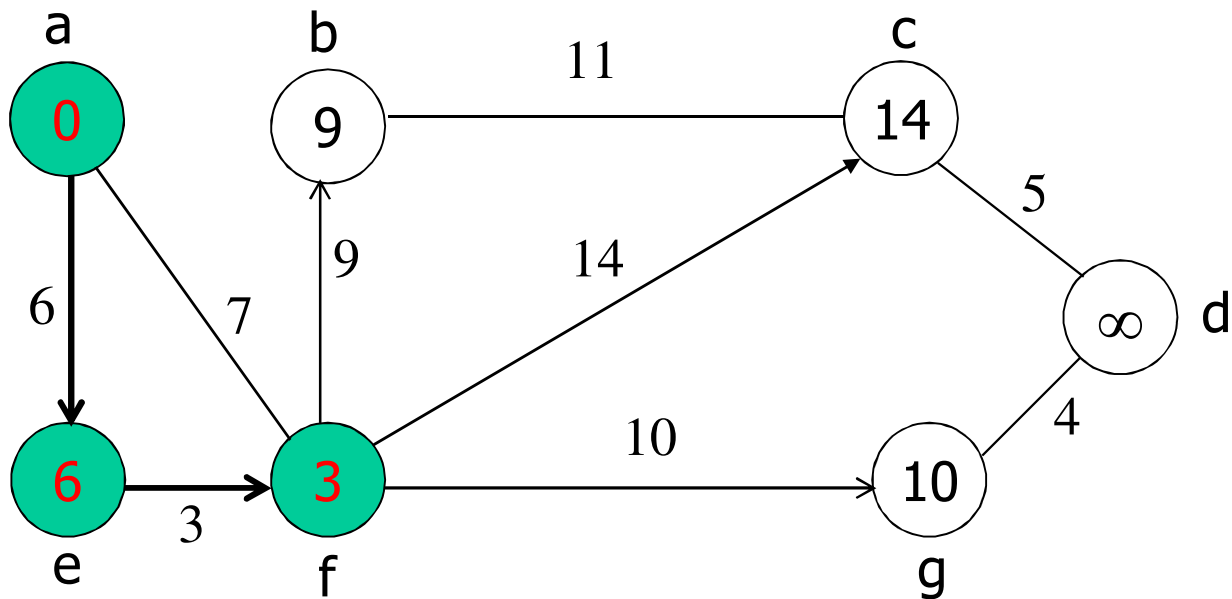
- Chọn e là đỉnh kế, $\text{key}[e] = 6$



Cập nhật $\text{key}[f]=3$

THUẬT TOÁN PRIM

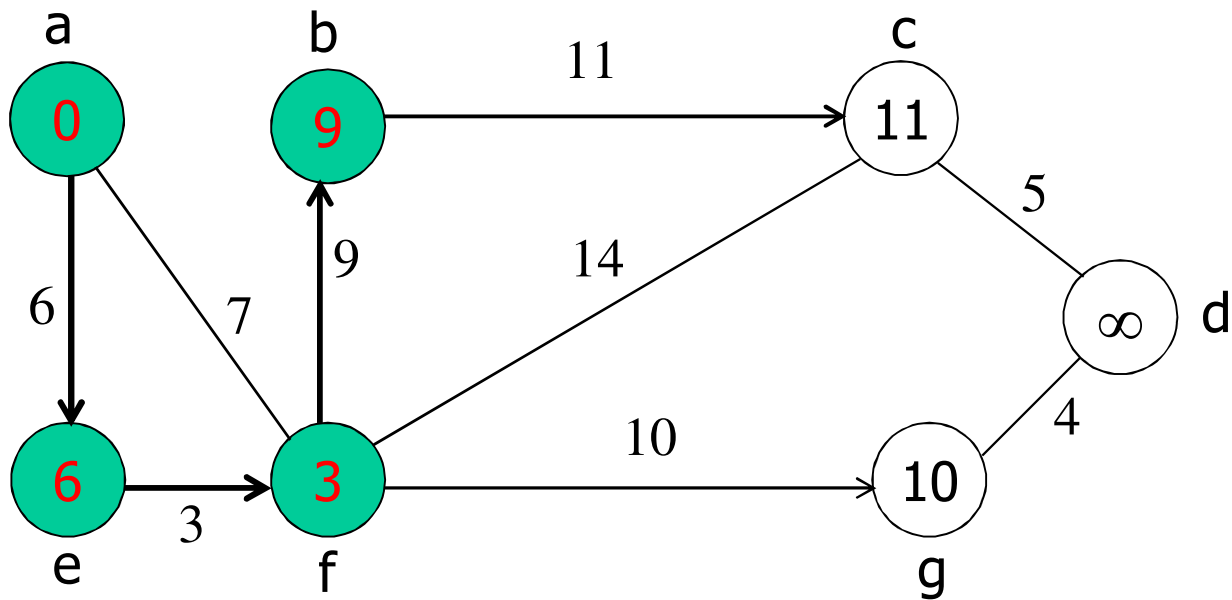
- Chọn f là đỉnh kế của MST, $\text{key}[f] = 3$



Cập nhật $\text{key}[b]=9$, $\text{key}[c]=14$, $\text{key}[g]=10$

THUẬT TOÁN PRIM

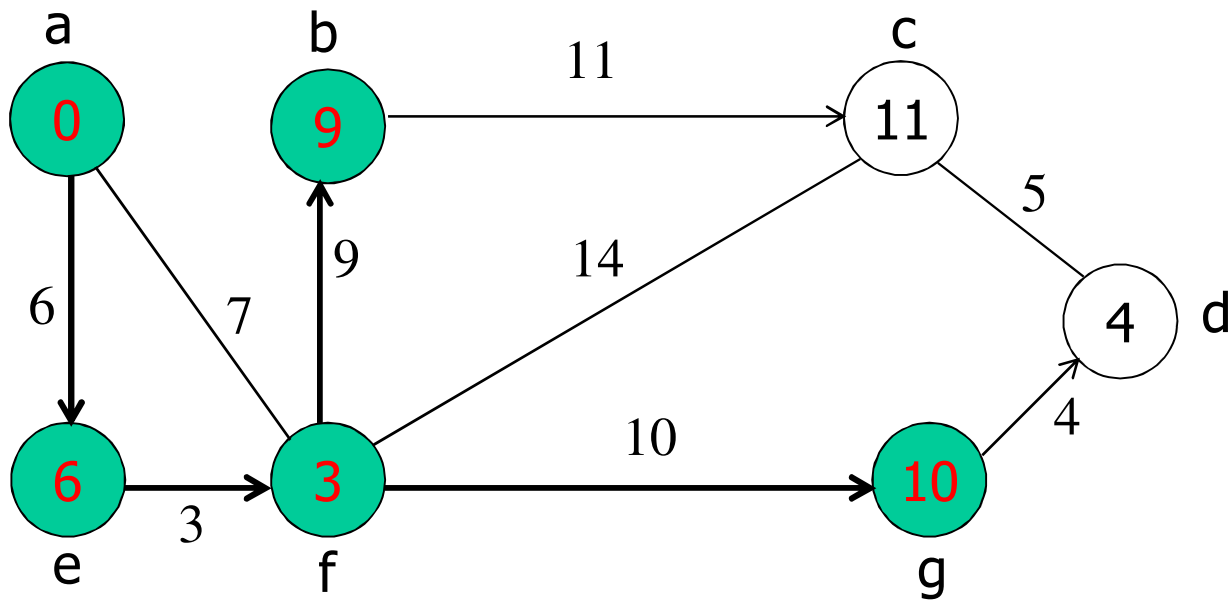
- Chọn b là đỉnh kế của MST, $\text{key}[b] = 9$



Cập nhật $\text{key}[c] = 11$

THUẬT TOÁN PRIM

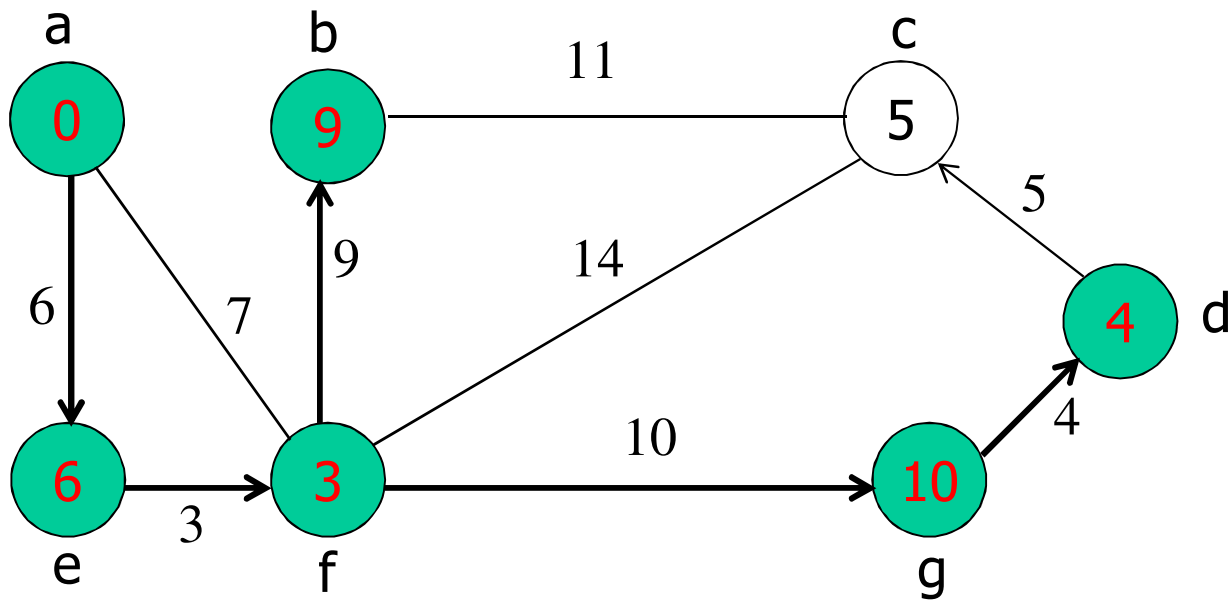
- Chọn g là đỉnh kế của MST, $\text{key}[g] = 10$



Cập nhật $\text{key}[d]=4$

THUẬT TOÁN PRIM

- Chọn d là đỉnh kế của MST, $\text{key}[d] = 4$



Cập nhật $\text{key}[c]=5$

THUẬT TOÁN PRIM

- Chọn c là đỉnh kế của MST, $\text{key}[c] = 5$, kết thúc thuật toán

